Lindelöf

$\Uparrow$

$2^{ns}$ αριθμησιμότητας $\Rightarrow$ $1^{ns}$ αριθμησιμότητας

$\Downarrow$

διαχωρισιμος

· Εστω Ε υπεραριθμησιμος
Κανενας απο τους παρακατω χωρους δεν ειναι μετρικοποιη-σιμος (2 τους μ.χ. $2^{ns} \Leftarrow\Rightarrow$ διαχ. $\Leftarrow\Rightarrow$ Lind.)

| Χωρας | $1^{ns}$ | $2^{ns}$ | Διαχωρ | Lindelöf |
|---|---|---|---|---|
| 1) Ιδιαιτερου σημειου {p} | ✓ | X | ✓ | X |
| 2) Εξαιρουμενου σημειου {p} | ✓ | X | X | ✓ |
| 3) Συμπεπ. τοπ | X | X | ✓ | ✓ |
| 4) Συναριθμησιμ | X | X | X | ✓ |

Ενδεικτικα (∃ στο βιβλιο τα παραπανω παραδ. ολοκληρωμένα)
1) ο {p, x} αριθμ. βαση (Εδω ολα τα ανοιχτα συνολα
2) ο {{p}, x, p}, x∈X x≠p εχουν το {p})
αλλα x υπεραρ $\Rightarrow$ θελω υπερ. πληθος συνολων
Δ ο Το ιδιο το {p} τεμνει ολα τα ανοιχτα $\bar{p} = \{\{p\}\} = E$
Δ ο {x, p} ∪ {p}, δεν εχει αριθμ. υποκάλυψη
(Πρεπει να καλυψω ολα τα x, αλλα τα x ειναι υπεραρ)

2) Ολα τα ανοιχτα συνολα δεν εχουν το {p}
Ολα τα κλειστά έχουν το {p}
$\bar{A} \neq E$

οπότε $\cup \tau$ ανοιχτό κάλυμμα $= \mathcal{E}$ αλλά $\cup \tau \ni \{p\}$ κ' μόνο το $\mathcal{E}$ έχει $\{p\}$, άρα $\cup \tau$ είναι όλο το $\mathcal{E}$ κ' μόνο το $\mathcal{E}$
Το μόνο ανοιχτό που περιέχει το $\{p\}$ είναι το $\mathcal{E}$
(Τα υπόλοιπα στο βιβλίο)

Lindelöf και διαχωρισιμότητα είναι τοπολογικές ιδιότητες αλλά όχι κληρονομικές
Διαχ. τοπ. ιδιοτ. $f : (\mathcal{E}_1, \tau_1) \xrightarrow[\text{επί, συν.}]{1-1} (\mathcal{E}_2, \tau_2)$

1ος τρ. Διαχ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}_2$ διαχωρ.
$\downarrow$
$D \subseteq \mathcal{E}_1$ αριθμ. $\overline{D} = \mathcal{E}_1 \rightsquigarrow \overline{f(D)} = \mathcal{E}_2$

$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ άρα $\mathcal{E}_2 = f(\mathcal{E}_1) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq \mathcal{E}_2 \Rightarrow \overline{f(D)} = \mathcal{E}_2$

2ος τρόπ. $Y = \mathcal{E}_2 = \overline{f(D)} \in \tau_2$
Αν γυρίσω πίσω $f^{-1}(Y)$ ανοιχτό. Τότε θα πρέπει να τέμνει $\overline{f(D)}$ άτοπο.
Διαχ. όχι κληρον: $\mathcal{E}$ ιδιαιτ. σημείου είναι διαχ.
Υποσύνολο του $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} \setminus \{p\} = \mathcal{E}$
Δεν βρίσκω αριθμ. υποσ. καθώς $\{\{x\}, x \neq p\}$ αριθμ. πυκνό υποσύνολο, καθώς δεν έχω $\{p\}$ κ' $\{x\}$ υποσ.

Πρόταση
Lindelöf είναι κληρονομική ιδιότητα στα κλειστά

# 14ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΑΞΙΩΜ. ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ο χώρος ικανοποιεί το αξίωμα $(T_0)$ όταν $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, για ένα τουλάχιστον από τα $x, y$ $\exists U \in \mathcal{T}$ που δεν περιέχει το άλλο.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

$T_1$: $\exists U, V \in \mathcal{T}$, $x \in U$, $y \notin U$ κ' $x \notin V$, $y \in V$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ (Hausdorff)**

- Ένας χώρος λέγεται $(T_2)$ όταν $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists U, V \in \mathcal{T}$, $x \in U$, $y \in V$: $U \cap V = \emptyset$

(Τα $x$ κ' $y$ δηλαδή να διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα)

**ΠΡΟΤΑΣΗ**

Αν ο χώρος είναι $(T_2)$ τότε είναι $T_0$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**.

Χώρος Sierp: $E = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}\}$

- Είναι $T_0$ καθώς αν πάρω το $a$, $\exists$ ανοιχτή περιοχή $\{a\}$ που δεν περιέχει το $b$.

  Δεν είναι $T_1$, γιατί $\nexists$ ανοιχτή περιοχή του $b$, που να μην περιέχει το $a$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 14.1.1**

Ένας χώρος είναι $T_1 \iff$ τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ** (Στο βιβλίο)

## Πρόταση

Ένας χώρος είναι $T_1 \iff A = \bigcap\{V \in \mathcal{T} : A \subseteq V\}$ $\forall A \subseteq \mathcal{E}$

## Πρόταση

Αν ένας χώρος είναι $T_2$, τότε είναι και $T_1$.

## Πρόταση (SOS)

$T_2$ είναι αυτοί οι χώροι που συγκλίνουν όλα τα δίκτυα και όλα έχουν το πολύ ένα σημείο σύγκλισης και αν ισχύει αυτό τότε είναι Hausdorff

$T_2 \iff \forall \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στον $\mathcal{E} \Rightarrow$ συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο

## Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ένα δίκτυο $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \to p$, $\to q$

$(\mathcal{E},\mathcal{T})$ $T_2 \Rightarrow \exists U,V \in \mathcal{T}: p\in U, q\in V \,/\, U\cap V=\emptyset$

$(x_\lambda)\to p \rightsquigarrow \exists \lambda_1\in\Lambda: x_\lambda\in U \ \forall \lambda\geq\lambda_1$

$(x_\lambda)\to q \rightsquigarrow \exists \lambda_2\in\Lambda: x_\lambda\in V \ \forall \lambda>\lambda_2$

Άρα $\exists \lambda_0>\lambda_1$ κ' $\lambda_0>\lambda_2$ τ.ω. $x_{\lambda_0}\in U$ κ' $x_{\lambda_0}\in V$ Άτοπο

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\mathcal{E}$ όχι $T_2$. Τότε $\exists p,q\in\mathcal{E}$ τ.ω. $U\cap V\neq\emptyset$ $\forall U,V\in\mathcal{T}$ με $p\in V$ κ' $q\in V$

$\Lambda=\{(U_i,V_i)\leq(U_j,V_j)$ αν-ν $U_i\subseteq U_j$ κ' $V_i\subseteq V_j\}$

$\hookrightarrow x_{U,V}$

$\{x_{U,V}\}_{(U,V)\in\Lambda}$ είναι δίκτυο

$\swarrow \quad \searrow$

$p \qquad q$

## Πρόταση

Αν $(\mathcal{E},\mathcal{T})$ $1^{ης}$ αριθ. και κάθε ακολ. συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο τότε ο $(\mathcal{E},\mathcal{T})$ είναι $T_2$